



# Desarrollo y Simulación del Sistema Suspensión Activa

*Diana M. Galeano Viasus<sup>1</sup>, Mauricio A. García<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Estudiante de Maestría en Ingeniería Electrónica,  
Pontificia Universidad Javeriana, galeano-d@javeriana.edu.co

<sup>2</sup> Estudiante de Maestría en Ingeniería Electrónica,  
Pontificia Universidad Javeriana, mauricio\_garcia@javeriana.edu.co

## Resumen:

Este artículo detalla las ecuaciones que describen la dinámica del sistema Suspensión Activa mediante las expresiones de movimiento de Lagrange. Adicionalmente, se determinan los puntos de operación del sistema y en Simulink es observada la respuesta del modelo obtenido, de acuerdo a variaciones en sus condiciones iniciales.

**Palabras clave:** Lagrange, Ecuaciones de estado, Suspensión Activa, Puntos de operación.

## Abstract:

This paper details the equations that describe the dynamics of the Active Suspension system using Lagrange's motion expressions. Additionally, the operating points of the system are determined and the response of the obtained model is plotted in Simulink, according to variations in its initial conditions.

**Keywords:** Lagrange, Equations of state, Active Suspension, Operation points.

## Introducción

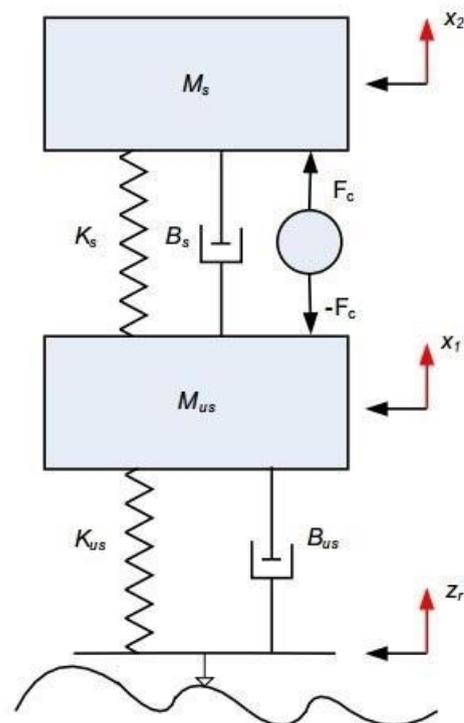
Determinar las ecuaciones que describen la dinámica de un sistema electromecánico permite establecer y simular el comportamiento de un sistema físico. Una de las metodologías usadas para ello es hacer uso de la representación por variables de estado, dicha representación surge del análisis del comportamiento mecánico y/o eléctrico del sistema; una manera para simplificar ese análisis es hacer uso de las ecuaciones de Lagrange, las cuales a partir de la descripción del sistema con base en su energía potencial y cinética permite obtener las ecuaciones de estado simplificando la formulación de las fuerzas inerciales del sistema.

El sistema electromecánico Suspensión Activa es un sistema lineal, el cual puede ser analizado mediante el modelo de cuarto de carro (QUANSER, 2010b); dicho modelo permite establecer el comportamiento del sistema alrededor de los puntos de operación (análisis local) mediante los puntos de equilibrio. Este artículo presenta el análisis teórico realizado al sistema Suspensión Activa de Quanser con el fin de obtener su representación en variables de estado, definir sus puntos de operación y simular el comportamiento del sistema.

## Procedimiento

Primero se representa el sistema de suspensión activa a través de un modelo de doble masa - resorte - amortiguador, como se muestra en la figura 1. Las entradas del sistema son la posición de la superficie del camino  $z_r(t)$  y el comando de control  $F_c$  (fuerza de control que se ejerce sobre la

carrocería y la llanta para contrarrestar la vibración causada por la superficie). Las coordenadas generalizadas del sistema son: el desplazamiento de la carrocería del vehículo  $x_2(t)$  (masa suspendida en el modelo de cuarto de carro), y el desplazamiento de la llanta  $x_1(t)$  (masa no suspendida en el modelo de cuarto de carro), todas referenciadas respecto a tierra, de acuerdo con lo especificado en el manual de Quanser (2010a).



**Figura 1.** Modelo de doble masa-resorte-amortiguador (QUANSER, 2010).

Tras aquello y para la formulación de Lagrange, el sistema es analizado en función de su energía cinética y energía potencial (Zak, 2003), cuyas expresiones están definidas de forma general en las ecuaciones, desde la 1 hasta la 3.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$



**Ecuación 1.** Energía cinética,  $E_C$  donde  $m$  es la masa y  $v$  es la velocidad.

$$E_C = mgh$$

**Ecuación 2.** Energía potencial gravitatoria, donde  $m$  es masa,  $g$  gravedad y  $h$  altura.

$$E_C = \frac{1}{2}kx^2$$

**Ecuación 3.** Energía potencial elástica, donde  $k$  es la constante elástica del resorte y  $x$  el desplazamiento, o posición, del resorte.

Como existen dos coordenadas es necesario determinar la energía potencial y cinética para cada una de ellas. Así, se define la energía cinética para las coordenadas generalizadas  $x_2$  y  $x_1$  empleando la ecuación 4, y la energía potencial para dichas coordenadas empleando la ecuación 5.

$$T_2 = \frac{1}{2}M_s(\dot{x}_2)^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}M_{us}(\dot{x}_1)^2$$

**Ecuación 4.** Expresiones para definir la energía cinética.

$$U_2 = \frac{1}{2}k_s(x_2 - x_1)^2 + M_s g x_2$$

$$U_1 = \frac{1}{2}k_{us}(x_1 - z_r)^2 + M_{us} g x_1$$

**Ecuación 5.** Expresiones para definir la energía potencial.

Luego, de acuerdo a la formulación de Lagrange, el Lagrangiano del sistema es  $L = T - U$ , donde  $T = T_1 + T_2$  y  $U = U_1 + U_2$ , por lo tanto, el Lagrangiano se obtiene mediante la ecuación 6.

$$T = \frac{1}{2}M_s(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}M_{us}(\dot{x}_1)^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_s(x_2 - x_1)^2 + M_s g x_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}k_{us}(x_1 - z_r)^2 + M_{us} g x_1$$

$$L = \frac{1}{2}M_s(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}M_{us}(\dot{x}_1)^2 +$$

$$- \frac{1}{2}k_s(x_2 - x_1)^2 - M_s g x_2 +$$

$$- \frac{1}{2}k_{us}(x_1 - z_r)^2 - M_{us} g x_1$$

**Ecuación 5.** Formulación del Lagrangiano.

Adicionalmente, debido a que el sistema cuenta con elementos que disipan energía (amortiguadores viscosos), es necesario plantear la función de disipación de Rayleigh ( $D$ ) para las coordenadas generalizadas  $x_2$  y  $x_1$  (Ogata,1987), mediante la ecuación 6.

$$D = \frac{1}{2}B_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}B_{us}(\dot{z}_r - \dot{x}_1)^2$$

**Ecuación 6.** Disipación de Rayleigh.

Así, a partir del Lagrangiano del sistema y la función de disipación de Rayleigh, se calculan las expresiones de Lagrange para el sistema no conservativo, según la ecuación 7.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F_{NC}x_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = F_{NC}x_2$$

**Ecuación 7.** Expresiones para calcular el Lagrangiano.

Ahora, aplicando las ecuaciones 8 y 9, se desarrollan las expresiones detalladas en la ecuación 7.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = M_{us}(\dot{x}_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_{us}(\ddot{x}_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = k_s(x_2 - x_1) +$$



$$- k_{us}(x_1 - z_r) - M_{us}g$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = - B_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - B_{us}(\dot{z}_r - \dot{x}_1)$$

$$- F_C = M_{us}(\ddot{x}_1) - k_s(x_2 - x_1) + k_{us}(x_1 - z_r) + M_{us}g + B_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - B_{us}(\dot{z}_r - \dot{x}_1)$$

**Ecuación 8.** Desarrollo de la expresión  $F_{NC}x_1'$ , detallada en la ecuación 7.

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = M_s(\dot{x}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = M_s(\ddot{x}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = - k_s(x_2 - x_1) - M_s g$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = B_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$F_C = M_s(\ddot{x}_2) + k_s(x_2 - x_1) + M_s g + B_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

**Ecuación 9.** Desarrollo de la expresión  $F_{NC}x_2'$ , detallada en la ecuación 7.

Finalmente, seleccionando las variables de estado como se indica en la ecuación 10 (Bay, 1999), las expresiones finales de la ecuaciones 8 y 9, pueden reescribirse en función de dichas variables de estado, tal como se detalla en las ecuaciones 11 y 12, respectivamente.

$$x_3 = x_2 - x_1 \quad x_4 = \dot{x}_2$$

$$x_5 = x_1 - z_r \quad x_6 = \dot{x}_1$$

**Ecuación 10.** Variables de estado.

$$- F_C = M_{us}(\ddot{x}_6) - k_s(x_3) + k_{us}(x_5) + M_{us}g +$$

$$- B_s(x_4 - x_6) - B_{us}(\dot{z}_r - x_6)$$

**Ecuación 11.** Reescritura de la expresión final en la ecuación 8.

$$F_C = M_s(\dot{x}_4) + k_s(x_3) + M_s g + B_s(x_4 - x_6)$$

**Ecuación 12.** Reescritura de la expresión final en la ecuación 9.

Reescribiendo todo el sistema en función de las derivadas de las cuatro variables de estado:  $\{\dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6\}$ , se obtienen las ecuaciones de estado con las cuales se modela el sistema dinámico Suspensión Activa, como se indica en la ecuación 13.

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_3 = x_4 - x_6$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{x}_2 = - \frac{k_s}{M_s}(x_3) - g + - \frac{B_s}{M_s}(x_4) + \frac{B_s}{M_s}(x_6) + \frac{1}{M_s}$$

$$\dot{x}_5 = \dot{x}_1 - \dot{z}_r \Rightarrow \dot{x}_5 = x_6 - \dot{z}_r$$

$$\dot{x}_6 = \ddot{x}_1 = \frac{k_s}{M_{us}}(x_3) - \frac{k_{us}}{M_{us}}(x_5) + - g + \frac{B_s}{M_{us}}(x_4) - \frac{B_{us}}{M_{us}}$$

**Ecuación 13.** Ecuaciones de estado (1).

## Modelo con Parámetros del Fabricante

Una vez se tienen las ecuaciones de estado del sistema se reemplazan los valores de los parámetros especificados en el manual de Quanser (2010b) para la Suspensión Activa, como se muestra en la ecuación 14.

$$M_s = 2,45 \text{ Kg.} \quad M_{us} = 1 \text{ Kg.}$$



$$k_s = 490 \frac{N}{m} \quad k_{us} = 1250 \frac{N}{m}$$

**Ecuación 14.** Parámetros de la Suspensión Activa, dados por Quanser (2010b).

Los valores:  $B_s$  y  $B_{us}$ , en la ecuación 15, fueron tomados de la guía de Apkarian y Abdossalami (2012).

$$B_s = 7,5 \frac{N \cdot s}{m} \quad B_{us} = 5 \frac{N \cdot s}{m}$$

**Ecuación 15.** Valores de  $B_s$  y  $B_{us}$ .

Así, pueden establecerse los parámetros de la ecuación 16, y las Ecuaciones de estado en la ecuación 17.

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{k_s}{M_s} = \frac{980}{2,45} \frac{m}{s^2} = 400 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{B_s}{M_s} = \frac{7,5}{2,45} \frac{m}{s^2} = 3,061 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{1}{M_s} = \frac{1}{2,45} \frac{m}{s^2} = 0,408 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{k_{us}}{M_{us}} = \frac{980}{1} \frac{m}{s^2} = 980 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{k_{us}}{M_{us}} = \frac{2500}{1} \frac{m}{s^2} = 2500 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{B_s}{M_{us}} = \frac{7,5}{1} \frac{m}{s^2} = 7,5 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{B_{us}}{M_{us}} = \frac{5}{1} \frac{m}{s^2} = 5 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{1}{M_{us}} = \frac{1}{1} \frac{m}{s^2} = 1 \frac{m}{s^2}$$

**Ecuación 16.** Parámetros del modelo.

$$\dot{x}_3 = x_4 - x_6$$

$$\dot{x}_4 = -400(x_3) - 9,8 +$$

$$-3,061(x_4) + 3,061(x_6) + 0,408 F_c$$

$$\dot{x}_5 = x_6 - \dot{z}_r$$

$$\dot{x}_6 = 980(x_3) - 2500(x_5) + -9,8 + 7,5(x_4) - 7,5(x_6)$$

**Ecuación 17.** Ecuaciones de estado (2).

Dichas ecuaciones de estado pueden ser expresadas matricialmente, tal como se muestra en la ecuación 18.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 - x_6 - 400x_3 - 9,8 - 3,061x_4 + 3,061x_6 \end{bmatrix}$$

**Ecuación 18.** Ecuaciones de estado (3).

## Definición de los Puntos de Equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema Suspensión Activa se evalúa el sistema sin entradas y haciendo las velocidades y aceleraciones igual a cero (Ruiz, 2014). Debido a eso se igualan a cero las derivadas de las variables de estado y las entradas también, como se indica en la ecuación 19.

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_4 = \dot{x}_5 = \dot{x}_6 = 0; \quad \dot{z}_r = F_c = 0$$

$$x_4 = \dot{x}_2 = x_6 = \dot{x}_1 = 0$$

**Ecuación 19.** Velocidades y entradas cero.

A partir de las Ecuaciones de estado, en la ecuación 13, se obtienen entonces los puntos de equilibrio, tal como se detalla en la ecuación 20.

$$-\frac{k_s}{M_s}(x_3) - g - \frac{B_s}{M_s}(x_4) + \frac{B_s}{M_s}(x_6) = 0$$

$$x_3 = -\frac{M_s}{k_s}g$$



$$\frac{k_s}{M_{us}}(x_3) - \frac{k_{us}}{M_{us}}(x_5) - g = 0$$

$$\frac{k_s}{M_{us}}\left(-\frac{M_s}{k_s}g\right) - \frac{k_{us}}{M_{us}}(x_5) - g = 0$$

$$-M_s g - k_{us}(x_5) - M_{us}g = 0$$

$$x_5 = -\frac{(M_s + M_{us})}{k_{us}}g$$

**Ecuación 20.** Obtención de los puntos de equilibrio.

Una vez determinados los puntos de equilibrio del sistema de suspensión activa se puede evidenciar lo siguiente:

- En las ecuaciones de estado que describen la dinámica del sistema es posible asumir despreciable la gravedad  $g$ , es decir tomarla como cero, puesto que no incide sobre ninguna de las variables de estado del sistema, en otras palabras cuando el sistema está en movimiento la gravedad no tiene relevancia.
- Por otra parte, al evaluar el comportamiento del sistema en reposo para determinar sus puntos de equilibrio, se observa que la gravedad es un factor que influye en el valor que pueden llegar a tomar, es decir la gravedad tiene relevancia cuando el sistema esta estático.
- Para este sistema se esperaría que los puntos de equilibrio fueran  $x_3 = 0$  y  $x_5 = 0$  cuando  $x_1$ ,  $x_2$  y  $z_r$  estuvieran en reposo y los resortes estuvieran en su estado natural sin comprimir; aunque en la realidad no es así, debido al efecto de la gravedad sobre las masas existe una compresión sobre los resortes produciendo que los puntos de equilibrio determinen un balance estático entre el peso de las masas y las fuerzas existentes en el resorte,

por lo tanto los puntos de equilibrio de acuerdo con los valores de los parámetros especificados en el manual de Quanser (2010b), para el sistema Suspensión Activa, son:  $x_3 = -0,0245$  y  $x_5 = -0,0135$ . Así, en la ecuación 21 se presentan los puntos de equilibrio del sistema.

$$Pe = [x_{3e} \ x_{4e} \ x_{5e} \ x_{6e}]'$$

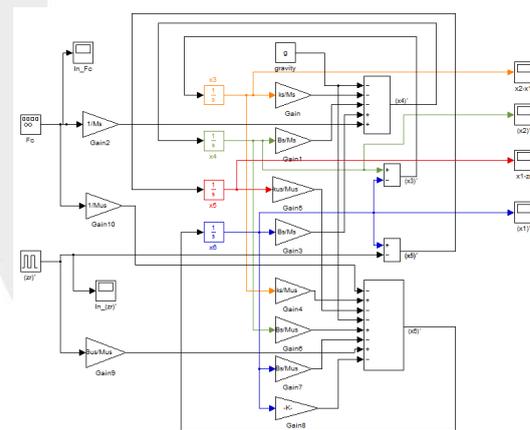
$$Pe = [-0.0245 \ 0 \ -0.0135 \ 0]'$$

**Ecuación 21.** Puntos de equilibrio (Pe).

Debido a que el sistema Suspensión Activa es un modelo lineal, sus ecuaciones de estado son de orden uno y sin expresiones de seno o coseno, por lo tanto no es necesario linealizar el sistema alrededor de los puntos de equilibrio.

## Simulaciones del Modelo Lineal y Resultados

En la figura 2 se muestra el diagrama simulado en Simulink de MatLab del sistema Suspensión Activa, teniendo en cuenta la gravedad.

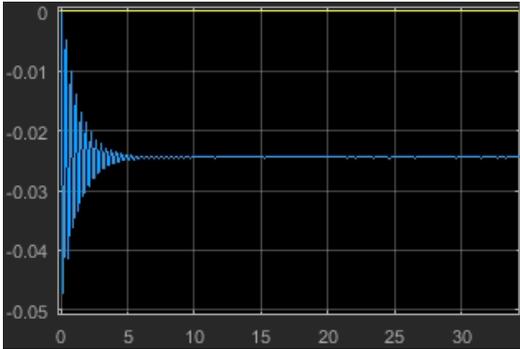


**Figura 2.** Diagrama en Simulink del sistema Suspensión Activa, con gravedad.

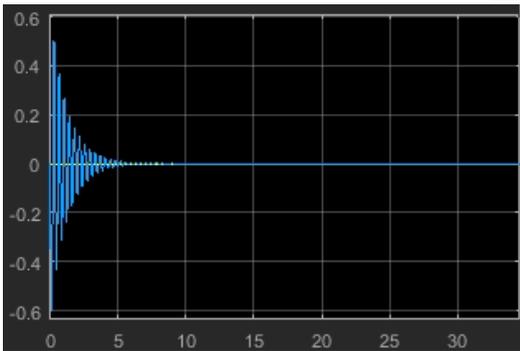
En las figuras 3 y 4 puede observarse el comportamiento del sistema cuando las



entradas están en cero, la posición de  $x_2$  respecto a  $x_1$  (desplazamiento de la carrocería respecto a la llanta) tiene un desplazamiento de  $-0.0245$  m. y la velocidad sobre  $x_2$  -la de la carrocería, tiene una pequeña oscilación pero se estabiliza en cero, puesto que el sistema no ha sido excitado.



**Figura 3.** Respuesta del sistema Suspensión Activa con gravedad en  $x_2$ :  $(x_2 - x_1)$ .

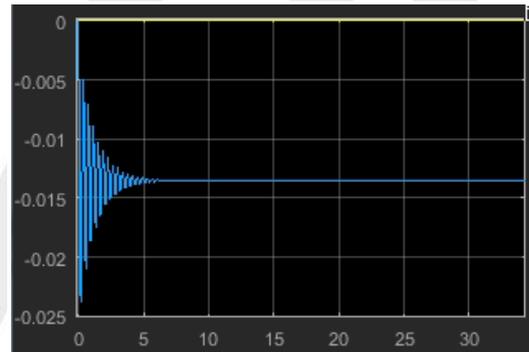


**Figura 4.** Respuesta del sistema Suspensión Activa con gravedad en  $x_2$ :  $(\dot{x}_2)'$ .

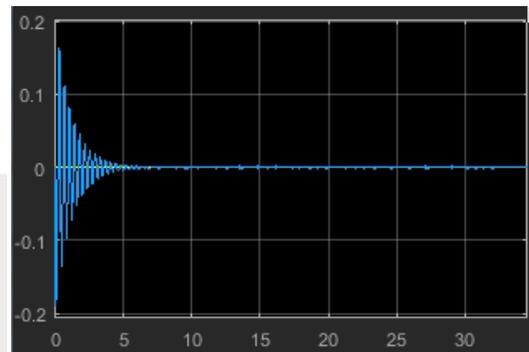
En las figuras 5 y 6 puede observarse el comportamiento del sistema cuando las entradas están en cero, la posición de  $x_1$  respecto a  $z_r$  -el desplazamiento de la llanta respecto a las irregularidades del terreno, se desplaza  $-0.0135$ m. mientras que la velocidad sobre  $x_1$  -la de la llanta, tiene una pequeña oscilación pero se estabiliza en cero puesto que el sistema no ha sido excitado.

Si se cambia la entrada  $\dot{z}_r$  por un tren de pulsos los desplazamientos  $(x_2 - x_1)$  y  $(x_1 - z_r)$  oscilan, pero al estabilizarse se mantienen alrededor de  $-0.0245$ m. y de

$-0.0135$ m., respectivamente. Por otra parte, por cada cambio de nivel en el tren de pulsos de entrada, la velocidad en  $x_2$  y  $x_1$  cambia, teniendo una oscilación mayor en  $x_2$ , así como un mayor tiempo de estabilización. En las figuras, desde la 7 hasta la 10, se presentan todas estas variaciones, la señal en azul representa el tren de pulsos de entrada.



**Figura 5.** Respuesta del sistema Suspensión Activa con gravedad en  $x_1$ :  $(x_1 - z_r)$ .



**Figura 6.** Respuesta del sistema Suspensión Activa con gravedad en  $x_1$ :  $(\dot{x}_1)'$ .

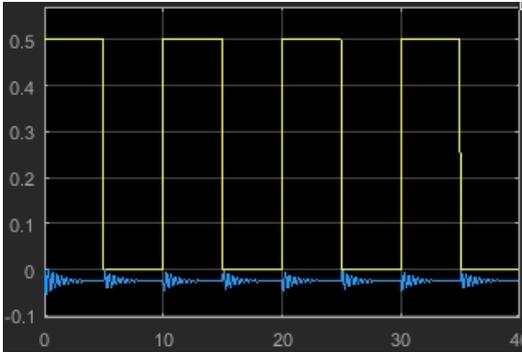
Tras lo anterior, se simuló el sistema de Suspensión Activa sin tener en cuenta la gravedad, y para ello se describió el sistema lineal mediante el espacio de estado indicado en la ecuación 22. La anterior descripción fue empleada en Simulink de Matlab, tal como se muestra en la figura 11.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{ks}{Ms} & -\frac{Bs}{Ms} & 0 & \frac{Bs}{Ms} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ks}{Mus} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Ms} & -1 & 0 & \frac{Bus}{Mus} & -\frac{1}{Mus} & \begin{bmatrix} \dot{z}_r \\ F_c \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

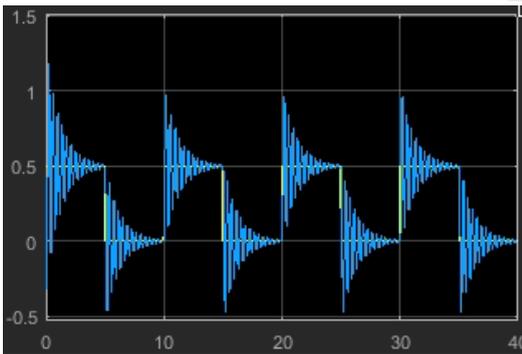


$$y = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1] [x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}]$$

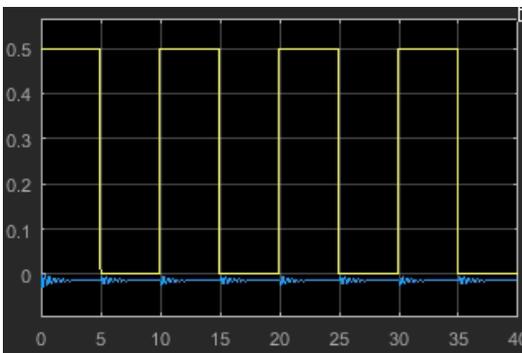
**Ecuación 22.** Modelo lineal del sistema Suspensión Activa sin gravedad.



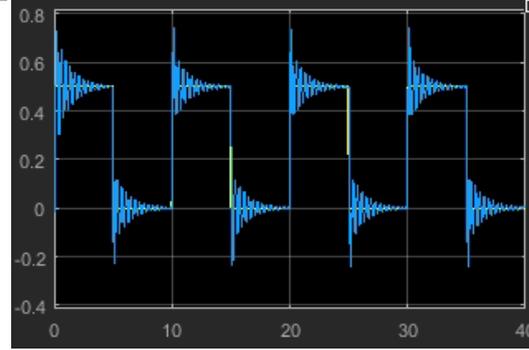
**Figura 7.** Respuesta del sistema con gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_2$ :  $(x_2 - x_1)$ .



**Figura 8.** Respuesta del sistema con gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_2$ :  $(x_2)$ .

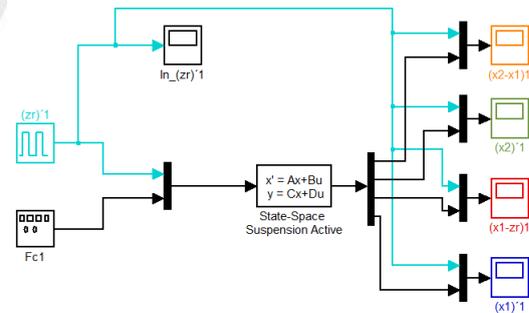


**Figura 9.** Respuesta del sistema con gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_1$ :  $(x_1 - z_r)$ .



**Figura 10.** Respuesta del sistema con gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_1$ :  $(x_1)'$ .

Para simular el sistema de Suspensión Activa, sin gravedad, se usaron como condiciones iniciales los puntos de equilibrio, indicados en la ecuación 21.



**Figura 11.** Diagrama Simulink del sistema Suspensión Activa, sin gravedad.

En las figuras, desde la 12 hasta la 15, se presenta la respuesta del sistema en espacio de estados cuando todas las entradas son cero. Al igual que el sistema descrito teniendo en cuenta la gravedad, los desplazamientos  $(x_2 - x_1)$  y  $(x_1 - z_r)$  y la velocidad en  $x_2$  y  $x_1$  oscilan hasta quedarse estable en un valor, en este caso para todos igual a cero, lo cual indica que el sistema no ha sido excitado. La diferencia con el sistema que tiene en cuenta la gravedad es que al estabilizarse los desplazamientos no se mantienen alrededor de los puntos de equilibrio, aunque al ampliar la gráfica en las figuras, desde la 16 hasta la 19, se puede observar que inicia su oscilación a partir de los puntos de



equilibrio:  $x_3 = -0,0245$  y  
 $x_5 = -0,0135$ .

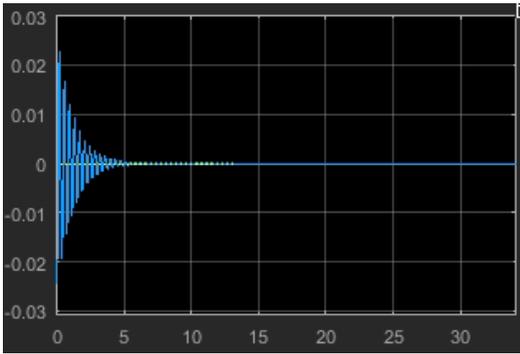


Figura 12. Respuesta del sistema sin gravedad en  $x_2: (x_2 - x_1)1$ .

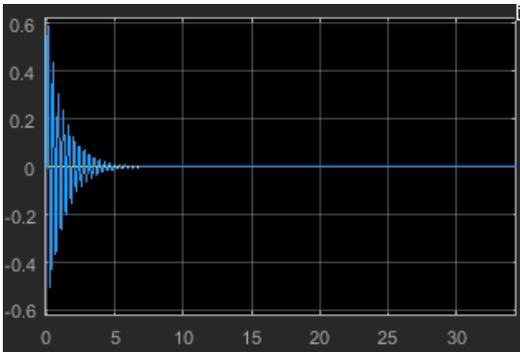


Figura 13. Respuesta del sistema sin gravedad en  $x_2: (x_2)1$ .

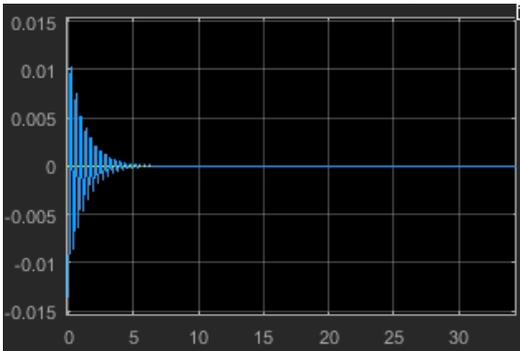


Figura 14. Respuesta del sistema sin gravedad en  $x_1: (x_1 - z_r)1$ .

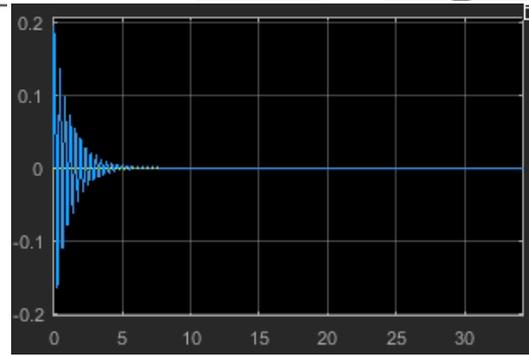


Figura 15. Respuesta del sistema sin gravedad en  $x_1: (x_1)1$ .



Figura 16. Zoom del sistema Suspensión Activa sin gravedad en  $x_2: (x_2 - x_1)1$ .

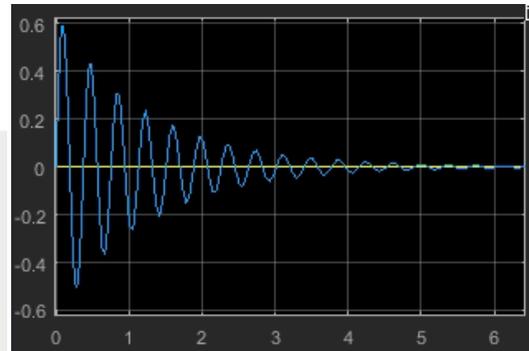


Figura 17. Zoom del sistema Suspensión Activa sin gravedad en  $x_2: (x_2)1$ .

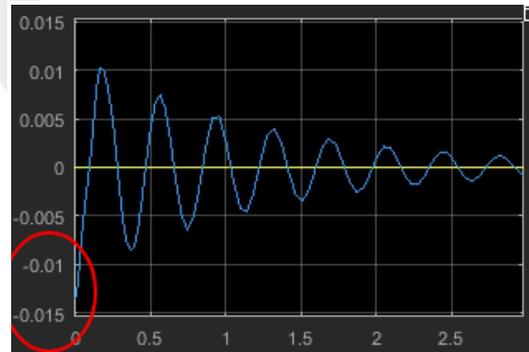


Figura 18. Zoom del sistema Suspensión Activa sin gravedad en  $x_1: (x_1 - z_r)1$ .

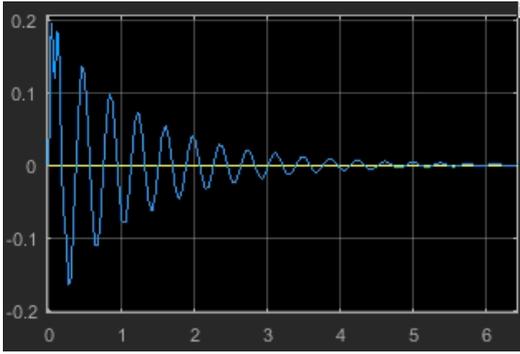


Figura 19. Zoom del sistema Suspensión Activa sin gravedad en  $x_1: (x_1)'1$ .

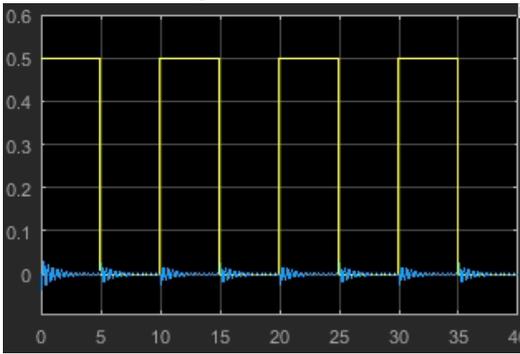


Figura 20. Respuesta del sistema sin gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_2: (x_2 - x_1)'1$ .

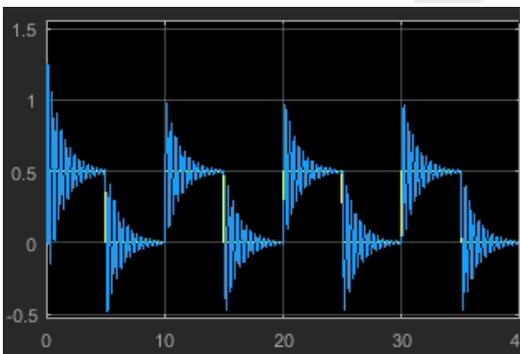


Figura 21. Respuesta del sistema sin gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_2: (x_2)'1$ .

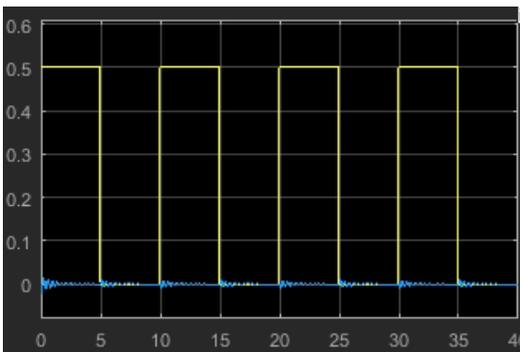


Figura 22. Respuesta del sistema sin gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_1: (x_1 - z_r)'1$ .

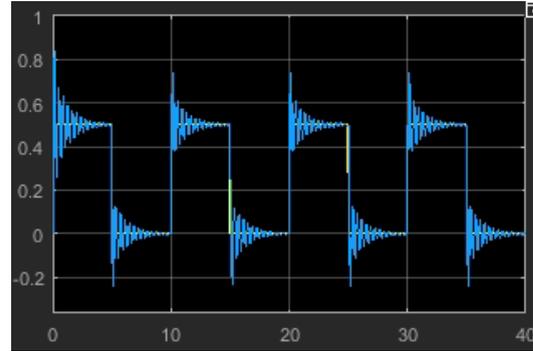


Figura 23. Respuesta del sistema sin gravedad, y  $\dot{z}_r \neq 0$ , en  $x_1: (x_1)'1$ .

Finalmente, se simuló el sistema en espacio de estados sin gravedad cambiando la entrada  $\dot{z}_r$  por un tren de pulsos, como se muestra en las figuras, desde la 20 hasta la 23. Al igual que en la simulación en donde se tiene en cuenta la gravedad, los desplazamientos  $(x_2 - x_1)$  y  $(x_1 - z_r)$  oscilan, pero al estabilizarse se mantienen alrededor de 0m. Además, por cada cambio de nivel en el tren de pulsos de entrada la velocidad en  $x_2$  y  $x_1$  cambia, evidenciando tanto una oscilación mayor en  $x_2$ , como un mayor tiempo de estabilización.

## Conclusiones

Se evidenció que modelar un sistema real como el de la Suspensión Activa, mediante la formulación de Lagrange, facilitó el modelamiento del sistema y su descripción mediante variables de estado, permitiendo de hecho una mejor comprensión del mismo.

Se comprobó que un sistema puede tener más de un punto de equilibrio. La selección del punto de equilibrio más adecuado depende del comportamiento real del sistema, puesto que establece las limitantes propias de éste.



Mediante las simulaciones realizadas se observa que el sistema Suspensión Activa es un sistema lineal. Además, se observa que es posible despreciar la gravedad en el análisis dinámico del sistema, puesto que el comportamiento no cambia al hacerla cero.

También se observa que al trabajar el sistema alrededor de los puntos de equilibrio se mantiene estable. Así, se podría llegar a mejorar los tiempos de estabilización si se implementara algún tipo de controlador, a manera de posible trabajo futuro.

## Referencias

- Apkarian, J. & Abdossalami, A. (2012). Laboratory Guide Active Suspension Experiment for LabVIEW™ Users, QUANSER, p. 6.
- Bay, J. (1999). Fundamentals of Linear State Space Systems. Virginia Polytechnic Institute and State University, pp. 3-22. Estados Unidos: WCB/McGraw-Hill.
- Katsuhiko, O. (1987). Dinámica de Sistemas, pp. 596-607. Prentice-Hall Hispanoamérica, México.
- QUANSER. (2010a). Active Suspension LQG Control using QUARC - Instructor Manual. Revisión 2.0, Documento número 845.
- QUANSER. (2010b). Active Suspension System - User Manual. Revisión 2.1, Documento número 847.
- Ruiz, F. (2014). Capítulo 1. Modelos de Sistemas [material de aula]. Sistemas Lineales, pp. 16-37. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia.
- Zak, S. H. (2003). Systems and Control. New York: Oxford University Press. pp. 1-47.